1ère - suites numériques

Portrait de Héron d'Alexandrie
(manuscrit grec du 9ème siècle après J.C.)

1. Vocabulaire et mode de génération

u_n est le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: il se prononce "u indice n".

Exemple : Une suite définie explicitement : $u_n = \dfrac{4n+5}{6n+7}$.

Les quatre premiers termes de cette suite sont les suivants :

n	0	1	2	3
u_n	5/7	9/13	13/19	17/25

Exemple : La suite de Héron est définie par récurrence :

$$\begin{aligned} &L_0 = 2 && \text{choix de la valeur initiale} \\ &L_{n+1} = \frac{L_n + 2/L_n}{2} && \text{formule de récurrence} \end{aligned}$$

Pour calculer le terme d'indice n, il faut d'abord calculer les termes précédents ...

n	0	1	2	3
L_n	2	3/2	24/17	577/408

Pour illustrer les notations introduites, L_2 ("L indice 2") fait référence à un terme précis dans cette suite, tandis que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fait référence à toute la suite : on dira ainsi que $L_n > 0$ pour tout n, car "positif" est la propriété d'un nombre.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons définir les propriétés que peut avoir la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Suites arithmétiques

Définition

Une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r est définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} & \text{choix de la valeur initiale} \\ u_{n+1} = u_n + r & \text{formule de récurrence} \end{cases}$$

Exemple : La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 421 et de valeur initiale -121 :

n	d_n
0	-121
1	300
2	721
3	1142

$$d_0 = -121$$
$$d_1 = d_0 + 421 = 300$$
$$d_2 = d_1 + 421 = 721$$
$$d_3 = d_2 + 421 = 1142$$

Propriété

Le terme général d'une suite arithmétique de raison r et de valeur initiale u_0 est donné par la formule explicite suivante :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Exemple : Considérons la suite de terme général $k_n = 4n+1$. c'est une suite artihmétique de raison 4 et de valeur initiale 1. Parmi les termes de k_n il y en a une infinité qui sont des nombres premiers :

par exemple, k_1, k_3, k_4 et k_7.

Exemple :

n	u_n
0	?
$\vdots$	$\vdots$
998	24032
999	?
1000	54278

On suppose que cette suite est arithmétique. Quelle est sa raison ? Quelle est sa valeur initiale ?

D'après la définition d'une suite arithmétique, nous avons $54278 = 24032 + 2 \times r$ donc $r = \dfrac{54278 - 24032}{2} = 15123$.

En utilisant la propriété précédente, nous obtenons une équation vérifiée par u_0 :

$$\begin{aligned} 54278 &= u_0 + 1000 \times 15123 \\ u_0 &= 54278 - 15123000 \\ u_0 &= -15068722 \end{aligned}$$

3. Suites géométriques

Exemple : Chaque fois que Jean passe dans la cuisine, il mange 25% du gâteau. Au bout de quatre passages, combien reste-t-il du gâteau ?

n	0	1	2	3	4
u_n	100%	75%	56,25%	42,19%	31,64%

A chaque étape, la proportion restante de gâteau est multipliée par un coefficient 0,75 : c'est ce qu'on appelle une suite géoémtrique de raison 0,75.

Définition

Une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r est définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} & \text{choix de la valeur initiale} \\ u_{n+1} = u_n \times r & \text{formule de récurrence} \end{cases}$$

Propriété

Le terme général d'une suite géométrique de raison r et de valeur initiale est donné par la formule suivante :

$$u_n = u_0 \times r^n$$

Exemple : Dans l'exemple précédent, on peut calculer qu'au bout de dix passages il reste 5,6% du gâteau.

4. Sens de variation d'une suite

Définition

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

croissante	si :	$\forall n \in \mathbb{N}$	$u_{n+1} \geq u_n$
strictement croissante	si :	$\forall n \in \mathbb{N}$	$u_{n+1} > u_n$
décroissante	si :	$\forall n \in \mathbb{N}$	$u_{n+1} \leq u_n$
strictement décroissante	si :	$\forall n \in \mathbb{N}$	$u_{n+1} < u_n$

Une suite qui est soit croissante, soit décroissante est dite *monotone*.

Précisons que l'inégalité $u_n \geq u_{n+1}$ n'a d'intérêt que parce qu'elle est valable **pour tout** n : c'est pour cela qu'on écrit "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante" et pas "u_n est croissante", ce qui n'aurait aucun sens.

Exemple : la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Héron est décroissante, et la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exemple : la suite de terme général $v_n = \frac{1}{n}$ est décroissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'inégalité $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ c'est-à-dire $v_{n+1} < v_n$.

⚠ il existe des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes ⚠

Exemple : la suite de terme général $u_n = (-1)^n$

n	0	1	2	3
u_n	1	-1	1	-1

C'est une suite "oscillante", au sens suivant :
$u_{n+1} > u_n$ si n est impair
$u_{n+1} < u_n$ si n est pair.

Aucune des deux inégalités n'est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$: cette suite n'est donc ni croissante, ni décroissante.

4.1. Sens de variation d'une suite arithmétique

Exemple : montrons que la suite arithmétique de raison 1 et de valeur initiale 3 est strictement croissante.

On peut le conjecturer en calculant les premiers termes :

n	0	1	2	3
u_n	3	4	5	6

On a donc bien les inégalités $t_1 > t_0$, $t_2 > t_1$ et $t_3 > t_2$.

Montrons l'inégalité $t_{n+1} > t_n$ pour tout n :

$1 > 0$ la raison de la suite est positive
$t_n + 1 > t_n + 0$
$t_{n+1} > t_n$

Ceci étant valable pour tout n, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

Propriété

Le sens de variation d'une suite arithmétique est entièrement déterminé par le signe de sa raison :
si $r > 0$, elle est strictement croissante
si $r < 0$, elle est strictement décroissante
et si $r = 0$, elle est constante

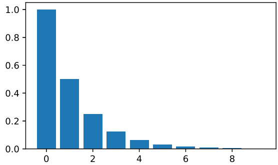
4.2. Sens de variation d'une suite géométrique

Propriété

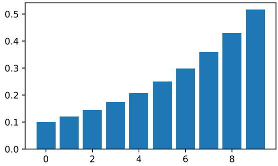
Soit une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r et de valeur initiale u_0. On suppose que $u_0 > 0$.

- si $r > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante
- si $0 < r < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante

Exemple : une suite géométrique n'est pas toujours monotone, voir la suite de raison -1 étudiée plus haut.



Suite géométrique de raison 0,5 et de valeur initiale positive



Suite géométrique de raison 120% et de valeur initiale $0{,}1$.

5. Encadrement d'une suite

Définition

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
majorée par M si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M$
minorée par m si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m$
encadrée entre m et M si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n \leq M$

Considérons la suite de terme général $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

n	0	1	2	3	999
u_n	0	0,500	0,666	0,750	0,999

En guise d'exercice, on pourra montrer que :

- $u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- pour tout $n \geq 999$, $0{,}999 < u_n < 1$

Nous pouvons dire qu'à partir du rang 999, on a un encadrement de u_n avec une marge d'erreur de $0{,}001$.

Cette description n'est pas tout à fait satisfaisante, car elle fait intervenir une marge d'erreur, qui dépend de l'expérience : est-ce qu'on se fixe une marge de trois chiffres significatifs après la virgule ? dix chiffres significatifs ? seize chiffres ?

6. Limite d'une suite

Continuons avec l'exemple de la suite de terme général $u_n = \dfrac{n}{n+1}$, et cette fois poussons la précision au dix-millième :

n	0	1	2	3	999	9999
u_n	0	0,5000	0,6666	0,7500	0,9990	0,9999

Dans ce cas, nous notons $e = 0{,}0001$ la précision et $l = 1$ la valeur limite, et alors nous avons l'encadrement suivant :

$$\forall n \geq 10000, \quad l - e \leq u_n \leq l + e$$

En fait, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ atteint la valeur 1 quelle que soit la marge d'erreur qu'on pourrait se donner. C'est précisément ce qu'on appellera une valeur limite au sens mathématique.

Définition

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l lorsque n tend vers $+\infty$ si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encadrée à partir d'un certain rang entre $l-e$ et $l+e$ quelle que soit la valeur de cette marge d'erreur.
Autrement dit, quelle que soit la marge d'erreur $e > 0$, il existe un rang N au-delà duquel nous avons l'encadrement suivant :

$$\forall n \geq N, \quad l - e \leq u_n \leq l + e$$

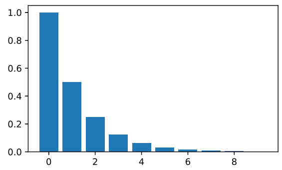
Propriété

Soit une suite croissante. De deux choses l'une :
soit elle est majorée, et alors elle admet une limite,
soit elle ne l'est pas, et alors elle n'admet pas de limite.
Dans le cas d'une suite décroissante,
soit elle est minorée, et alors elle admet une limite,
soit elle ne l'est pas, et alors elle n'admet pas de limite.

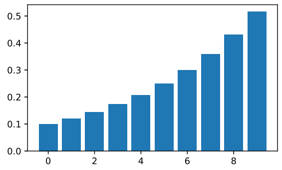
Exemple : Une suite géométrique de raison $0{,}1$ et de valeur initiale -10 est croissante, et majorée par 0. D'après la proposition précédente, elle admet donc une limite. On admet que cette limite est égale à zéro.

Propriété

Une suite géométrique dont la raison r vérifie $-1 < r < 1$ tend vers 0 lorsque $n \mapsto +\infty$.
Une suite arithmétique n'admet pas de limite, sauf si sa raison est 0.



Suite géométrique de raison $0{,}5$ et de valeur initiale positive



Suite géométrique de raison 120% et de valeur initiale $0{,}1$.

Méthode : pour montrer qu'une suite tend vers l, on peut étudier la suite de terme général $v_n = u_n - l$ et montrer qu'elle tend vers 0.

Exemple : montrons que la suite de terme général $u_n = \dfrac{3n+1}{2n+5}$ tend vers $\dfrac{3}{2}$:

$$u_n - l = \frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3}{2} = \frac{\text{-}13}{4n+10}$$

Nous voulons montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l, il nous faut donc montrer que, à précision fixée $e > 0$, à partir d'un certain rang N, l'inégalité suivante est vérifiée : $-e < u_n - l < e$. On a déjà $u_n - l < 0$ donc il reste à résoudre l'inéquation $-e < u_n - l$.

$$\begin{aligned}
-e &< \frac{-13}{4n+10} \\
e &> \frac{13}{4n+10} \\
e \times (4n+10) &> 13 \\
4en &> 13 - 10e \\
n &> \frac{13-10e}{4e}
\end{aligned}$$

Par exemple, pour une précision de $e = 0{,}01$, nous voyons que l'encadrement $-0{,}001 < v_n < 0{,}001$ est valable dès que $n > 323$.

Exemple : Pour finir cette section, montrons que la suite de Héron $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.

Nous avons montré en exercice les propriétés suivantes :

- $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante
- $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a l'encadrement $l_n < \sqrt{2} < L_n$
- pour tout $n\in\mathbb{N}$, $L_{n+1}-\sqrt{2} = \dfrac{(L_n-\sqrt{2})^2}{2L_n}$

Nous voulons montrer, $e>0$ étant fixé, l'encadrement

$$\forall n \geq N, \quad -e \leq L_n - \sqrt{2} \leq e$$

valable à partir d'un certain rang N.

D'une part, on peut remarque que $0 \leq L_n - \sqrt{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Puisque $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, nous avons l'inégalité $L_n-\sqrt{2} < L_0-\sqrt{2}$ dont on déduit que $L_n-\sqrt{2} < 1$.

D'autre part, puisque $L_n > 1$, nous avons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} L_{n+1}-\sqrt{2} &< \frac{(L_n-\sqrt{2})^2}{2L_n} \\ &< \frac{(L_n-\sqrt{2})^2}{2} \\ &< \frac{1}{2}\times(L_n-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Si on pose $d_n = L_n-\sqrt{2}$, on voit donc que $d_{n+1} \leq 0{,}5\times d_n$, et donc que $d_n \leq (0{,}5)^n \times d_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Nous avons donc l'encadrement suivant : $0 < L_n - \sqrt{2} < (0{,}5)^n$ (puisque $d_0 < 1$.

Puisque la suite géométrique de raison $0{,}5$ et de valeur initiale 1 tend vers 0, nous pouvons trouver un rang N tel que $(0{,}5)^n \leq e$ pour tout $n \geq N$, et nous avons alors l'encadrement $0 < L_n - \sqrt{2} < e$ pour tout $n \geq N$: ceci achève notre démonstration.

On pourrait également montrer que la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$ mais il vaut mieux attendre d'en savoir plus sur l'art de calculer les limites de suites. La preuve que nous avons proposé se trouvera également simplifiée lorsqu'on pourra utiliser les théorèmes d'encadrement et de passage à la limite dans les équations et inéquations...

7. Conclusion

Parmi les suites numériques, nous avons étudié en détail deux familles imporantes : les suites arithmétiques d'une part, et les suites géométriques d'autre part.

Deux propriétés à étudier pour une suite générique sont :

- le sens de variation : la suite est-elle croissante ? décroissante ?
- la suite est-elle majorée ? minorée ?

Nous avons vu, dans le cas des suites arithmétiques et géométriques, comment ces propriétés dépendent de la raison et de la valeur initiale de la suite.

La notion d'encadrement d'une suite a permis de définir les conditions d'existence de la limite d'une suite.

Nous avons pu montrer que la méthode de Héron définit deux suites $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui fournissent un encadrement de $\sqrt{2}$. Chacune des suites est monotone et converge vers $\sqrt{2}$.

C'est encore cette méthode qui est utilisée aujourd'hui par les calculatrices et les langages de programmation (C, Python, Octave, etc.).

Cet exemple montre comment la notion de suite est née de l'étude des nombres : puisqu'il n'y a pas de formule pour calculer $\sqrt{2}$, alors il faut faire une suite de calculs et décider si on s'arrête au bout d'un nombre d'étapes fixé ou lorsqu'on atteint une précision suffisante.

8. Rappels : déduire une inégalité d'une autre

Pour justifier certaines approximations avec précision, nous avons recours à des chaînes de déductions: chaque ligne est une affirmation vraie, qui se déduit de la précédente.

Voici un chaîne de déductions :

$8 > 4$	
$(\sqrt{8})^2 > 2^2$	
$(\sqrt{8})^2 - 2^2 > 0$	*on soustrait* 2^2 *à chaque membre*
$(\sqrt{8}-2)(\sqrt{8}+2) > 0$	on factorise le membre de gauche
$\sqrt{8}-2 > 0$	*on divise chaque membre par* $(8+\sqrt{2})$
$\sqrt{8} > 2$	conclusion

En voici une deuxième :

$8 < 9$	
$(\sqrt{8})^2 < 3^2$	
$(\sqrt{8})^2 - 3^2 < 0$	*on soustrait* 3^2 *à chaque membre*
$(\sqrt{8}-3)(\sqrt{8}+3) < 0$	on factorise le membre de gauche
$\sqrt{8}-3 < 0$	*on divise chaque membre par* $(8+\sqrt{3})$
$\sqrt{8} < 3$	conclusion

Nous avons ainsi montré en deux temps l'encadrement

$$2 < \sqrt{8} < 3$$

Conséquence : le chiffre des unités de $\sqrt{8}$ en écriture décimale est 2.

Définition

Deux inéquations sont équivalentes si elles ont les mêmes ensembles de solutions.

Exemple : les inéquations $x \leq 2$ et $x+3 \leq 5$ sont équivalentes : l'ensemble des solutions est l'intervalle $]-\infty;2]$.

On note alors : $x \leq 2 \Leftrightarrow x+3 \leq 5$ En revanche, les inéquations $x^2 \leq 4$ et $x \leq 2$ ne le sont pas. En effet :

l'ensemble des solutions de $x^2 \leq 4$ est l'intervalle $[-2;2]$.

l'ensemble des solutions de $x \leq 2$ est l'intervalle $]-\infty;2]$

On peut seulement écrire l'implication suivante : $x^2 \leq 4 \implies x \leq 2$

Propriété

Soient a, b et c des nombres réels.
Ajouter une même quantité aux deux membres d'une inéquation produit une inéquation équivalente :

$$a \leq b \iff a + c \leq b + c$$

Si $c > 0$, alors les inégalités $a \leq b$ et $a \times c \leq b \times c$ sont équivalentes :

$$a \leq b \iff a \times c \leq b \times c$$

En revanche, si $c < 0$, l'équivalence est la suivante :

$$a \leq b \iff a \times c \geq b \times c$$

Exemple : Les inéquations $-x \leq 6$ et $x \geq -6$ sont équivalentes.

Les inéquations $2x \leq 4$ et $x \leq 2$ sont équivalentes.