# TP Pratiquer l'algorithmique et programmer

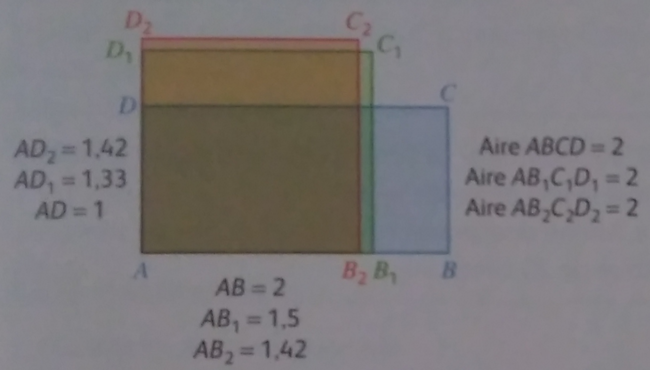
## Approximation de $\sqrt{a}$ par la méthode de Héron d'Alexandrie

Objectif PYTHON
Boucles et fonctions.

L'objectif de ce TP est de décrire une méthode permettant d'encadrer $\sqrt{2}$ avec une amplitude arbitraire. Cette méthode, déjà connue par les Babyloniens, est également attribuée au Grec Héron d'Alexandrie (Ier siècle). Il l'expose dans le premier tome de son ouvrage *Metrica*, ouvrage qui a été découvert en 1896.

### Partie A Une description géométrique de la méthode de Héron

On considère le rectangle $ABCD$ de dimensions 1 et 2. On construit un nouveau rectangle $AB_1C_1D_1$ dont la longueur $AB_1$ est la moyenne des dimensions de $ABCD$, la largeur $AD_1$ étant calculée pour que l'aire reste égale à 2. Puis on recommence selon le même procédé pour s'approcher, à terme, d'un carré d'aire 2.




On note $\ell_0 = 1$ et $L_0 = 2$ les dimensions du rectangle initial $ABCD$. On a l'encadrement :

$$\ell_0 < \sqrt{2} < L_0$$

**1.** Le rectangle $AB_1C_1D_1$ a pour dimensions :

$$L_1 = \frac{\ell_0 + L_0}{2} \text{ et } \ell_1 = \frac{2}{L_1}$$

Calculer les valeurs exactes de $L_1$ et $\ell_1$.

On admet (voir la preuve en **Partie C**) qu'on obtient l'encadrement plus précis suivant.

$$\ell_1 < \sqrt{2} < L_1$$

**2.** Le rectangle $AB_2C_2D_2$ a pour dimensions :

$$L_2 = \frac{\ell_1 + L_1}{2} \text{ et } \ell_2 = \frac{2}{L_2}$$

Calculer les valeurs exactes de $L_2$ et $\ell_2$ pour en déduire un nouvel encadrement de $\sqrt{2}$.

**3.** Réitérer le processus pour obtenir un nouvel encadrement de $\sqrt{2}$.

### Partie B Programmation de l'algorithme en langage Python

À chaque itération de l'algorithme de Héron, on obtient un encadrement de plus en plus fin de $\sqrt{2}$.

On souhaite automatiser la recherche d'un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude inférieure à un niveau de précision donné par l'utilisateur.

On considère ainsi la fonction heron ci-contre écrite en langage Python.

```
def heron(amplitude):
    l=...
    L=...
    while L-l>amplitude:
        L=(l+L)/2
        l=...
    return l,L
```

**1.** En s'inspirant des calculs effectués dans la **Partie A**, compléter cette fonction.

**2.** Tester cette fonction pour obtenir un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude inférieure à $10^{-5}$.

**3. Pour aller plus loin**

Proposer une modification de cette fonction heron de sorte qu'elle affiche un encadrement de $\sqrt{a}$ $(a > 0)$, $a$ étant un nombre positif indiqué en argument.

### Partie C Justification théorique de la validité de la méthode de Héron

On suppose que l'on dispose d'un encadrement de $\sqrt{2}$ par deux réels strictement positifs $\ell$ et $L$ avec $\ell = \frac{2}{L}$ :

$$\ell < \sqrt{2} < L$$

On considère les nombres $L' = \frac{\ell + L}{2}$ et $\ell' = \frac{2}{L'}$.

On souhaite démontrer que :

$$\ell < \ell' < \sqrt{2} < L' < L$$

**1. a.** On souhaite justifier que $L' > \sqrt{2}$. Montrer que :

$$L' - \sqrt{2} = \frac{L + \frac{2}{L}}{2} - \sqrt{2} = \frac{\left(L - \sqrt{2}\right)^2}{2L}$$

Conclure.

**b.** En déduire que :

$$\sqrt{2} < L' < L$$

**2. a.** On rappelle que les inverses de nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire des nombres initiaux.

Déduire alors de la question **1. b.** que :

$$\frac{2}{\sqrt{2}} > \frac{2}{L'} > \frac{2}{L}$$

et donc que $\ell < \ell' < \sqrt{2}$.

**b. Conclusion**

Expliquer pourquoi d'une étape de l'algorithme à la suivante, on obtient un encadrement plus fin de $\sqrt{2}$.

# Algorithme de Héron d'Alexandrie

January 3, 2021

## 1 Partie A : premières étapes de l'algorithme

A chaque étape :

- la nouvelle longueur est $\frac{l+L}{2}$
- la nouvelle largeur est adaptée pour que le produit largeur x longueur soit égal à 2
- autrement dit, si $L$ est la nouvelle longueur alors $l = \frac{2}{L}$

**Etape 1 :** $L = 1,5$ et $l = \frac{4}{3}$

**Etape 2 :** $L = \frac{17}{12}$ et $l = \frac{24}{17}$

| étape | $l$ | $L$ | amplitude |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1,33 | 1,5 | 0,17 |
| 2 | 1,411 | 1,416 | 0,005 |

Finalement, on obtient en deux étapes l'encadrement suivant : $1,411 < \sqrt{2} < 1,416$.

L'amplitude de l'encadrement est de $0,05$ càd $5 \times 10^{-3}$ en notation scientifique.

Une valeur approchée de $\sqrt{2}$ au centième près est donc $1,41$

## 2 Partie B : étude à la calculatrice

On a pu voir dans la partie A qu'à chacune des deux étapes, l'amplitude de l'encadrement se resserre.

Voyons comment les choses se poursuivent si on fait plus d'étapes.

Notons que tout ceci peut très bien se faire à la calculatrice, avec un tout petit peu de patience.

[2]:
```
def heron(amplitude):
    l=1 # largeur du rectangle de départ
    L=2 # Longueur du rectangle de départ
    niter=0;
    # si on s'arrête maintenant,
    # on aura fait 0 calculs
    # niter enregistre le nombre d'étapes de calculs
    while L-l>amplitude:
```

```
        L=(L+l)/2 # longueur du nouveau rectangle
        l=2/L     # largeur  du nouveau rectangle
        niter+=1
    # renvoyer : les dimensions du rectangle, leur écart, et le nombre␣
↪d'itérations
    return l,L,L-l,niter
```

Le programme que nous allons écrire s'arrête lorsque on obtient l'amplitude demandée

Par exemple, si on demande une amplitude de $10^{-5}$ alors le programme s'arrête au bout de trois itérations.

[3]:
```
print(heron(1e-5))
```

```
(1.41421143847487, 1.4142156862745097, 4.2477996395895445e-06, 3)
```

En fait l'amplitude est même moitié moins que $10^{-5}$ !

Pour aller plus loin, voyons combien d'itéraions il faudrait pour obtenir une amplitude plus fine

[4]:
```
for amplitude in [1e-5,1e-10,1e-15]:
    print(heron(amplitude))
```

```
(1.41421143847487, 1.4142156862745097, 4.2477996395895445e-06, 3)
(1.4142135623715002, 1.4142135623746899, 3.1896707497480747e-12, 4)
(1.4142135623730951, 1.414213562373095, -2.220446049250313e-16, 5)
```

Vous n'en croyez pas vos yeux ? Et bien si, le nombre de zéros derrière la virgule est multiplié par deux à chaque itération.

Autrement dit, le nombre de décimales correctes est *au moins* deux fois plus grand à chaque étape: - A l'étape 1 : $\sqrt{2} \simeq 1$, on a 1 chiffre exact - A l'étape 2 : $\sqrt{2} \simeq 1,4$, on a 2 chiffres exacts - A l'étape 3 : $\sqrt{2} \simeq 1,41421$, on a 6 chiffres exacts - A l'étape 4 : $\sqrt{2} \simeq 1,414213562373095$, on a 16 chiffres exacts

### 2.1 Bilan :

**Coût des calculs :** A chaque étape :

- une addition de fractions
- une division par 2
- une division difficile

**Rapidité :** On a vu expérimentalement que le nombre de décimales correctes double à chaque étape. Ceci se vérifie en théorie mais l'exercice nous demande simplement de montrer que l'écart se resserre

**Calculer d'autres racines** Intuitivement, la formule de la moyenne fait que le rectangle devient peu à peu un carré, si bien qu'au bout de quelques étapes on a $L^2 \simeq 2$, et donc $L \simeq \sqrt{2}$. Nous allons préciser ceci dans la partie $C$, mais dors et déjà on peut voir que si on impose au carré d'avoir une surface égale à $d$, alors on obtiendra au bout de quelques étapes $L \simeq \sqrt{d}$. Notre nouvel algorithme est donc:

[23]:
```python
# par défaut, on demandera un encadrement précis au huitième chiffre après la␣
↪virgule
def racine(d,amplitude=1e-8):
    l=1
    L=d
    while L-l>amplitude:
        L=(L+l)/2 # longueur du nouveau rectangle
        l=d/L     # largeur  du nouveau rectangle
    return l,L
```

Par exemple on peut vérifier que racine de 16 vaut bien 4:

[24]:
```python
racine(16)
```

[24]:
```
(3.9999999999999494, 4.000000000000051)
```

C'est rassurant, calculons maintenant une nouvelle racine:

[25]:
```python
import math
print(racine(3))
print(math.sqrt(3))
```

```
(1.7320508051230272, 1.7320508100147274)
1.7320508075688772
```

En comparant avec le programme de calcul de Python, on peut vérifier que les 8 premiers chiffres sont exacts $(1,73200508)$

# 3 Partie C : l'amplitude se resserre à chaque étape

Pour montrer celà, on va avoir besoin d'être un peu plus précis. Si à chaque étape, on appelle $l$ et $L$ les anciennes dimensions du rectangle, et $l'$ et $L'$ les nouvelles, alors :

- $\sqrt{2} < L'$ : la longueur reste supérieure à $\sqrt{2}$
- $L' < L$ : la longueur du rectangle diminue
- $l < l'$ : la largeur du rectangle augmente
- $l' < \sqrt{2}$ : la largeur reste inférieure à $\sqrt{2}$

L'énoncé résume ces objectifs par une chaine d'inégalités :

$$l < l' < \sqrt{2} < L' < L$$

Il nous faut démontrer ceci, en utilisant trois ingrédients :

- $L' = \frac{L+l}{2}$ (formule de la longueur)
- $l' = \frac{2}{L}$ (formule de la largeur)
- $l < \sqrt{2} < L$ (encadrement fourni par l'étape précédente)

**La longueur reste supérieure à $\sqrt{2}$** On va étudier la différence $L' - \sqrt{2}$ pour montrer qu'elle est positive:

$$\begin{aligned} L' - \sqrt{2} &= \frac{L + \frac{2}{L}}{2} - \sqrt{2} \\ &= \frac{L^2 + 2}{2L} - \sqrt{2} \\ &= \frac{L^2 + 2\sqrt{2}L + 2}{2L} \\ &= \frac{(L - \sqrt{2})^2}{2L} \end{aligned}$$

*(on va étudier tout ceci en classe...)*

On a donc bien une quantité positive puisque le numérateur et le dénominateur sont positifs. Conclusion : $L' > \sqrt{2}$. La longueur reste positive d'une étape à l'autre.

**La longueur diminue à chaque étape** Ca c'est la partie la plus facile : puisqu'on calcule à chaque fois une moyenne, il est logique que la longueur soit de plus en plus petite.

Partons de l'inégalité $l < L$

On ajoute $L$ à chaque membre : $l + L < L + L = 2L$

On divise chaque membre par 2: $\frac{l+L}{2} < \frac{2L}{2} = L$

On reconnait la formule de la moyenne, donc $L' < L$.

**La largeur augmente et reste inférieure à $\sqrt{2}$** L'évolution de la largeur est donnée mécaniquement par la formule $l' = \frac{2}{L'}$

Calculer l'inverse inverse les inégalités: puisque $L' < L$, alors $\frac{1}{L} < \frac{1}{L'}$

Multiplier par 2 conserve les inégalités donc $\frac{2}{L} < \frac{2}{L'}$, autrement dit $l < l'$: la largeur augmente.

Avec le même raisonnement, partant de l'inégalité $\sqrt{2} < L'$, comme la fonction inverse est décroissante, on a $\frac{1}{L'} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, en multipliant par 2 l'inégalité est conservée, donc $\frac{2}{L'} < \frac{2}{\sqrt{2}}$. Puisque $l' = \frac{2}{L'}$ et $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, on conclut $l' < \sqrt{2}$: la largeur reste inférieure à $\sqrt{2}$.

**Conclusion : l'amplitude se resserre à chaque étape** Nous avons démontré que

$$l < l' < \sqrt{2} < L' < L$$

, et tous ces nombres sont positifs.

On en déduit d'abord que $L - l > L' - l$ puisque $L'$ est plus petit.

Ensuite, on déduit $L' - l > L' - l'$: on soustrait un nombre plus grand, donc l'écart se resserre.

Si on enchaine ces inégalités, on peut conclure~: $L - l > L' - l'$: l'écart se resserre.

**Conséquence importante : l'écart $L - l$ nous dit combien de chiffres après la virgule sont exacts, même si on ne connait pas la valeur exacte de $\sqrt{2}$**

C'est tout l'intérêt de montrer que cet écart se resserre.

Pour aller plus loin, on pourrait repartir de la formule suivante, pour montrer que le nombre de chiffres exacts après la virgule double à chaque étape:

$$L' - \sqrt{2} = \frac{(L - \sqrt{2})^2}{2L}$$

Mais ce sera pour une autre fois …